Een combinatorische oplossing voor vraag 10 van de LIMO 2010

Stijn Vermeeren* (University of Leeds)

16 juni 2010

Samenvatting

Probleem 10 van de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade 2010vraagt om te bewijzen dat alle matrices in een bepaalde familie nilpotent zijn. De twee modeloplossingen maken gebruik van de stelling van Cayley-Hamilton. Ik geef een puur combinatorisch bewijs.

De LIMO (Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade) is een wiskundecompetitie die elk jaar in Nederland wordt georganiseerd [1]. Teams van wiskundestudenten uit Nederland en Vlaanderen nemen deel aan de wedstrijd. De editie van 2010 vond plaats op 28 mei 2010 in Utrecht. Vraag nummer 10 werd opgesteld door Jaap Top van de Universiteit van Groningen en luidt als volgt:

> Gegeven is een positief geheel getal m, en $n = 2^m - 1$. De $n \times n$ matrix $A = (a_{i,j})$ over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is gegeven door $a_{i,j} = 1$ als $|i - j| = 1$ en $a_{i,j} = 0$ anders. Laat zien dat A nilpotent is.
>
> **Opmerking:** *Een matrix A heet nilpotent als een macht van A gelijk is aan de nulmatrix.*

Twee modeloplossingen werden gegeven [2], die meer bepaald bewijzen dat $A^n = \mathbf{0}$. Beide modeloplossingen maken gebruik van de stelling van Cayley-Hamilton, die zegt dat elke vierkante matrix over een commutatieve ring een *nulpunt* (in de evidente betekenis) is van zijn eigen karakteristieke veelterm. De rest van de oplossing bestaat dan uit het slim uitrekenen van die karakteristieke veelterm, die gelijk blijkt te zijn aan λ^n.

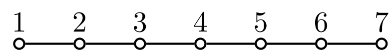
Het is echter opvallend dat de matrix A gelijk is aan de bogenmatrix van de padgraaf P_n. En zoals algemeen bekend: de elementen van de k'de macht van een bogenmatrix tellen het aantal paden met lengte k tussen twee bepaalde knopen van de graaf. Dit zet ons op weg naar een combinatorisch bewijs.

*Met dank aan mijn broer Mats Vermeeren, die als student aan de K.U. Leuven deel uitmaakte van het winnende team in de LIMO 2010 en via wie ik dit probleem leerde kennen.

1 Achtergrond uit de grafentheorie

Een **graaf** G bestaat uit een eindige verzaming V van **knopen** (Engels: *vertices*) en een verzameling E van **bogen** (Engels: *edges*). Hierbij is elke boog een (ongeordend) tweetal van knopen. Als $\{x, y\}$ een boog is van G, dan zeggen we dat de twee knopen x en y **verbonden** zijn door deze boog. (Een knoop is dus *niet* verbonden met zichzelf.) Een **wandeling** in G is een eindige rij $x_0, x_1, \ldots, x_k$ van knopen, waarbij elke knoop verbonden is met de volgende. Knoop x_0 is het **begin**, knoop x_n is het **einde** en k is de **lengte** van de wandeling.

Zij n een positief geheel getal. De **padgraaf** P_n is de graaf met als knopen de elementen van $\{1, 2, \cdots, n\}$ waarbij twee getallen enkel verbonden zijn als ze opeenvolgend zijn. De padgraaf P_7 bijvoorbeeld kan als volgt worden voorgesteld:



Figuur 1: De padgraaf P_7.

Zij G een graaf met n knopen. We veronderstellen vanaf nu dat de knopen steeds genummerd zijn van 1 tot en met n. De **bogenmatrix** (Engels: *adjacency matrix*) van G is de $n \times n$ matrix A waarbij

$$a_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{als de knopen } x \text{ en } y \text{ verbonden zijn,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Bijvoorbeeld, de padgraaf P_7 heeft als bogenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 1. *Zij G een graaf met n knopen en met bogenmatrix A. Zij k een positief geheel getal en stel $B = A^k$. Dan is $b_{x,y}$ het aantal wandelingen met lengte k die beginnen in knoop x en eindigen in knoop y.*

Bewijs. We bewijzen met inductie op k. Het geval $k = 1$ klopt per definitie van de bogenmatrix. De unieke wandeling met lengte 1 van knoop x naar knoop y bestaat immers enkel als x en y verbonden zijn.

Veronderstel nu dat het lemma geldig is voor $k = l$. Schrijf $C = A^l$ en beschouw $B = A^{l+1} = C \cdot A$. Per definitie van matrixvermenigvuldiging is

$$b_{x,y} = \sum_{z=1}^{n} c_{x,z} \cdot a_{z,y}.$$

Hierbij is $c_{x,z}$ het aantal wandelingen met lengte l tussen x en z (inductiehypothese). Verder is $a_{z,y}$ gelijk aan 1 als knopen z en y verbonden zijn, en anders 0 (definitie bogenmatrix). Dus $b_{x,y}$ is de som van het aantal wandelingen van lengte l tussen knopen x en z over alle knopen z die met y verbonden zijn. Dit is het aantal wandelingen van lengte $l + 1$ tussen knopen x en y, gesommeerd over de voorlaatste knoop van de wandeling. Het lemma geldt dus ook voor $k = l + 1$.

Met inductie is het lemma bewezen voor alle positieve gehele getallen k. $\square$

2 Een combinatorisch bewijs

Stelling 2. *Zij m een positief geheel getal, $n = 2^m - 1$ en $k \geq n$ een natuurlijk getal. Zij x en y twee knopen van de padgraaf P_n. Dan is het aantal wandelingen in P_n met lengte k van x naar y even.*

Bewijs. We geven een bewijs met inductie op m.

Het gevaal $m = 1$ (en dus $n = 1$) is triviaal, want er is geen enkele wandeling met positieve lengte in P_1.

Veronderstel dus dat de stelling waar is voor $m = l$, en beschouw $n = 2^{l+1} - 1$ en $k \geq 2^{l+1} - 1$. Zij x en y twee knopen van P_n. We verdelen de wandelingen met lengte k van x naar y in drie klassen:

Klasse 1: de wandelingen die nooit in 2^l komen.

Klasse 2: de wandelingen die juist één keer in 2^l komen.

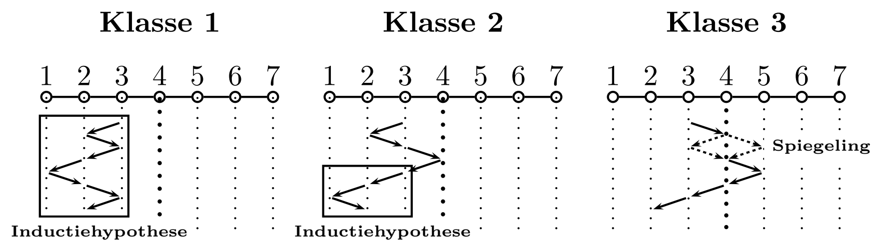
Klasse 3: de wandelingen die minstens twee keer in 2^l komen.

We zullen bewijzen dat elk van deze drie klassen een even aantal wandelingen bevat, waaruit onmiddellijk volgt dat de stelling ook geldt voor $m = l + 1$.

Essentieel voor het toepassing van de inductiehypothese, is het feit dat de delen van $P_{2^{l+1}-1}$ aan de linker- en aan de rechterkant van 2^l, isomorf zijn met P_{2^l-1}. De wandelingen in $P_{2^{l+1}-1}$ die volledig links (resp. rechts) liggen van 2^l komen dus overeen met wandelingen in P_{2^l-1}.

De drie gevallen worden in Figuur 2 samengevat.

Klasse 1: Als x en y langs verschillende kanten van 2^l liggen, zijn er geen wandelingen in deze klasse. Als x en y aan dezelfde kant van 2^l liggen, dan zijn de wandelingen in deze klasse juist de wandelingen van lengte



Figuur 2: Een illustratie van hoe de pariteit van het aantal wandelingen in elk van de drie klassen geteld wordt. Hier is $m = 3$, $n = 7$, $k = 7$, $x = 3$ en $y = 2$.

k tussen x en y in het deel van $P_{2^{l+1}-1}$ dat aan die kant van 2^l ligt. Deze deelgraaf is isomorf met P_{2^l-1}, dus per inductiehypothses is dit aantal wandelingen even.

Klasse 2: We beweren dat voor elke $i \in \{0, 1, 2, \cdots, k\}$ er in deze klasse een even aantal wandelingen is die juist na i stappen in 2^l komen. Een dergelijke wandeling

$$x, a_1, \cdots, a_{i-1}, 2^l, a_{i+1}, \cdots, a_{k-1}, y$$

wordt bepaald door twee deelwandelingen, elk volledig aan een bepaalde kant van 2^l: een wandeling met lengte $i - 1$ van x naar a_{i_1} en een wandeling met lengte $k - i - 1$ van a_{i+1} naar y. (Als $i = 0$ of $i = k$ wordt de wandeling volledig bepaald door één zo'n deelwandeling met lengte $k - 1$.) Omdat

$$k \geq 2^{l+1} - 1$$

is ofwel

$$i - 1 \geq 2^l - 1$$

ofwel

$$k - i - 1 \geq 2^l - 1.$$

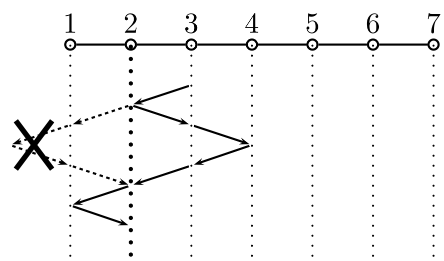
Door de inductiehypothese kan een van de deelwandelingen dus op een even aantal manieren gekozen worden, zodat ook het totaal aantal wandelingen even is.

Klasse 3: Bij de wandelingen in deze klasse kunnen we de deelwandeling tussen de eerste twee voorkomens van 2^l *spiegelen*. Spiegelen wil zeggen: elk stap naar *rechts* (van i naar $i+1$) wordt vervangen door een stap naar *links* (van i naar $i-1$) en vice versa. Het resultaat is een andere wandeling in deze klasse. Het twee maal toepassen van deze operatie geeft bovendien terug de oorspronkelijke wandeling. Bijgevolg kunnen we de wandelingen in deze klasse opsplitsen in groepjes van twee (een wandeling samen met zijn *spiegelbeeld*) en is het aantal wandelingen in deze klasse dus even.

Door volledige inductie is de stelling dus geldig voor alle positieve gehele getallen m, zoals gevraagd. $\square$

Merk op dat de ongelijkheid $k \geq n$ optimaal is. Er is immers slechts één wandeling in P_n met lengte $n-1$ van knoop 1 naar knoop n.

Merk ook op dat het niet mogelijk is om simpelweg te kijken we naar de eerste knoop x met maximale 2-exponent (dat is de exponent van 2 in de priemfactorisatie) die minstens twee keer voorkomt in de wandeling, en de deelwandeling tussen de eerste twee voorkomens van x te spiegelen. Op die manier blijft x weliswaar de eerste knoop met maximale 2-exponent die twee keer bezocht wordt in de resulterende wandeling, zodat twee keer spiegelen ons inderdaad terugbrengt naar de originele wandeling. Maar de spiegeling is niet altijd goed gedefinieerd, zoals Figuur 3 aantoont. Het bovenstaande bewijs lost dit probleem op door de wandeling in twee te splitsen waar de wandeling 4 bezoekt, waarbij ook de deelwandeling die we in Figuur 3 probeerden te spiegelen, gesplitst wordt (zie het middelste voorbeeld in Figuur 2).



Figuur 3: Hoe een naïeve methode fout loopt. Het middelste voorbeeld van Figuur 2 illustreert hoe het bewijs dit geval correct behandelt.

De oplossing voor de LIMO-vraag volgt nu onmiddellijk.

Gevolg 3. *Zij m een positief geheel getal en $n = 2^m - 1$. De $n \times n$ matrix $A = (a_{i,j})$ over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is gegeven door $a_{i,j} = 1$ als $|i-j| = 1$ en $a_{i,j} = 0$ anders. Dan is $A^n = \mathbf{0}$.*

Bewijs. De matrix A is de bogenmatrix van P_n. Schrijf $B = A^n$. Volgens Lemma 1 en aangezien we over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ werken, is $b_{x,y}$ de pariteit van het aantal wandelingen met lengte n van x naar y in P_n. Dit aantal is even volgens de bovenstaande stelling, dus $b_{x,y} = 0$ voor alle x, y. Bijgevolg is $A^n = B = \mathbf{0}$, zoals gevraagd. $\square$

Referenties

[1] Limo 2010. Website. `http://limo.a-eskwadraat.nl/`.

[2] Limo 2010 uitwerkingen. Beschikbaar op `http://limo.a-eskwadraat.nl/oudeopgaven/limo2010opl.pdf`.